

# Тангенциальное отображение и ассоциированные интегрируемые уравнения

В.Э. Адлер (ИТФ им. Л.Д. Ландау)

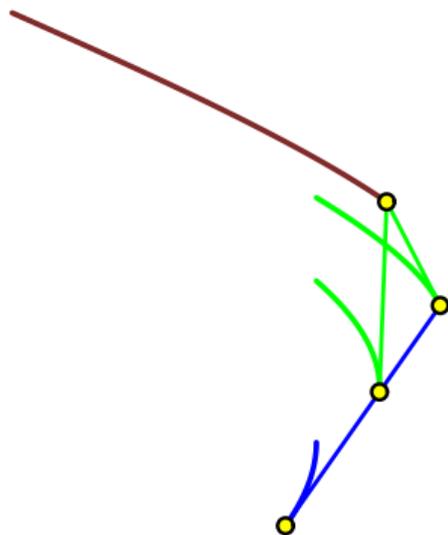
[[J. Phys. A 42 \(2009\) 332004](#)] Тангенциальное отображение определяется на множестве гладких плоских кривых. Оно удовлетворяет свойству 3D-совместности и тесно связано с некоторыми хорошо известными интегрируемыми уравнениями.

## Введение

Пусть даны гладкие плоские кривые  $C$ ,  $C_1$  и  $C_2$ . Проведём касательную к  $C$  через произвольную точку  $r$  на этой кривой. Пусть она пересекает  $C_1$  в точке  $r_1$  и  $C_2$  в точке  $r_2$ . Определим точку  $r_{12}$  как пересечение касательных к соответствующим кривым, проходящих через эти точки. При движении точки  $r$  по кривой  $C$ , точка  $r_{12}$  вычертит новую кривую  $C_{12}$ . Тем самым определено **локальное** отображение на множестве плоских кривых,

$$F : (C, C_1, C_2) \mapsto C_{12},$$

которое и будет называться **тангенциальным отображением**.

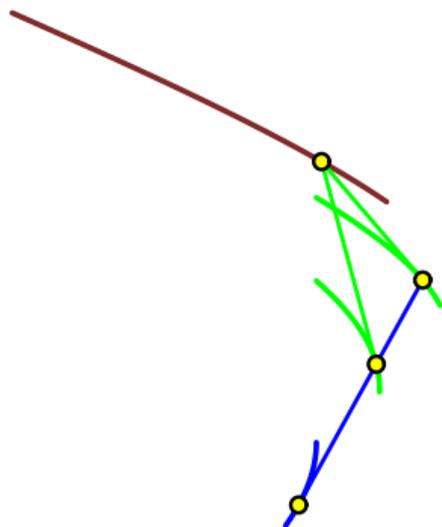


## Введение

Пусть даны гладкие плоские кривые  $C$ ,  $C_1$  и  $C_2$ . Проведём касательную к  $C$  через произвольную точку  $r$  на этой кривой. Пусть она пересекает  $C_1$  в точке  $r_1$  и  $C_2$  в точке  $r_2$ . Определим точку  $r_{12}$  как пересечение касательных к соответствующим кривым, проходящих через эти точки. При движении точки  $r$  по кривой  $C$ , точка  $r_{12}$  вычертит новую кривую  $C_{12}$ . Тем самым определено **локальное** отображение на множестве плоских кривых,

$$F : (C, C_1, C_2) \mapsto C_{12},$$

которое и будет называться **тангенциальным отображением**.

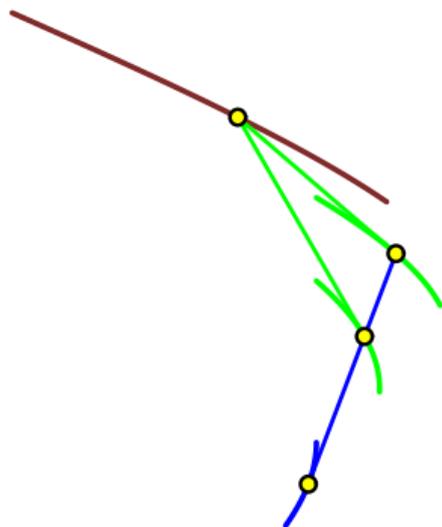


## Введение

Пусть даны гладкие плоские кривые  $C$ ,  $C_1$  и  $C_2$ . Проведём касательную к  $C$  через произвольную точку  $r$  на этой кривой. Пусть она пересекает  $C_1$  в точке  $r_1$  и  $C_2$  в точке  $r_2$ . Определим точку  $r_{12}$  как пересечение касательных к соответствующим кривым, проходящих через эти точки. При движении точки  $r$  по кривой  $C$ , точка  $r_{12}$  вычертит новую кривую  $C_{12}$ . Тем самым определено **локальное** отображение на множестве плоских кривых,

$$F : (C, C_1, C_2) \mapsto C_{12},$$

которое и будет называться **тангенциальным отображением**.

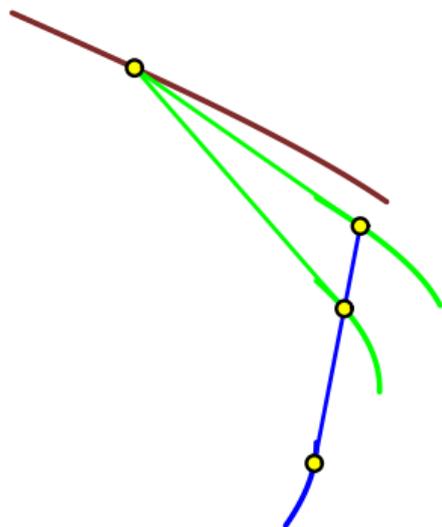


## Введение

Пусть даны гладкие плоские кривые  $C$ ,  $C_1$  и  $C_2$ . Проведём касательную к  $C$  через произвольную точку  $r$  на этой кривой. Пусть она пересекает  $C_1$  в точке  $r_1$  и  $C_2$  в точке  $r_2$ . Определим точку  $r_{12}$  как пересечение касательных к соответствующим кривым, проходящих через эти точки. При движении точки  $r$  по кривой  $C$ , точка  $r_{12}$  вычертит новую кривую  $C_{12}$ . Тем самым определено **локальное** отображение на множестве плоских кривых,

$$F : (C, C_1, C_2) \mapsto C_{12},$$

которое и будет называться **тангенциальным отображением**.

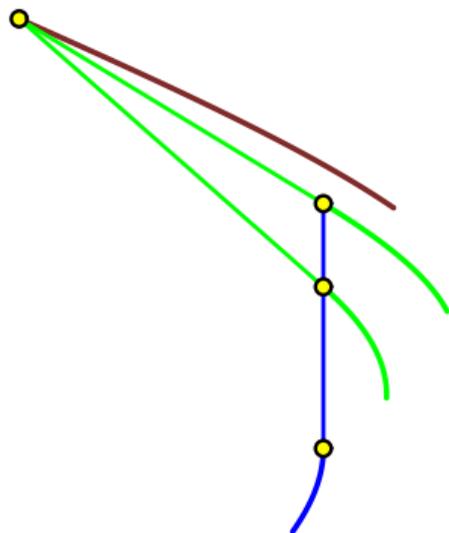


## Введение

Пусть даны гладкие плоские кривые  $C$ ,  $C_1$  и  $C_2$ . Проведём касательную к  $C$  через произвольную точку  $r$  на этой кривой. Пусть она пересекает  $C_1$  в точке  $r_1$  и  $C_2$  в точке  $r_2$ . Определим точку  $r_{12}$  как пересечение касательных к соответствующим кривым, проходящих через эти точки. При движении точки  $r$  по кривой  $C$ , точка  $r_{12}$  вычертит новую кривую  $C_{12}$ . Тем самым определено **локальное** отображение на множестве плоских кривых,

$$F : (C, C_1, C_2) \mapsto C_{12},$$

которое и будет называться **тангенциальным отображением**.



Слово “**локальное**” означает, что:

- во-первых, отображение определено не для всех троек кривых, поскольку касательная к  $C$  может и не пересекать  $C_1$  или  $C_2$ . Рассматриваются только такие кривые или участки кривых, где построение возможно;
- во-вторых, отображение может быть многозначным, поскольку пересечений может быть несколько. В этом случае рассматривается какая-то одна ветвь отображения.

## План

- свойство 3D совместности;
- связь с факторизацией дифференциальных операторов;
- связь с интегрируемыми уравнениями;
- примеры и редукции.

## Пример. Логарифмическая спираль

Логарифмическая спираль была введена Декартом в 1638 г., в письме Мерсенну.



## Пример. Логарифмическая спираль

Логарифмическая спираль была введена Декартом в 1638 г., в письме Мерсенну. Якоб I Бернуллли (1654–1705)



## Пример. Логарифмическая спираль

Логарифмическая спираль была введена Декартом в 1638 г., в письме Мерсенну. Якоб I Бернулли (1654–1705) завещал изобразить её на своём надгробии<sup>1</sup> с надписью

**EADEM MUTATA RESURGO,**<sup>2</sup>

поскольку эта кривая инвариантна относительно целого ряда геометрических преобразований



---

<sup>1</sup>Рисунки взяты из Wikipedia

<sup>2</sup>I'll be back

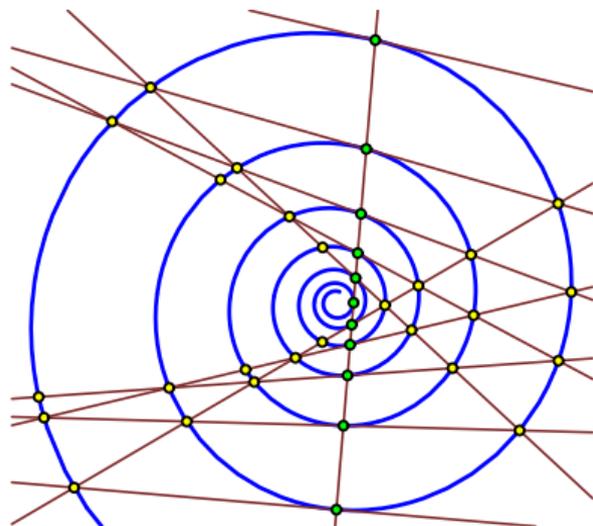
## Пример. Логарифмическая спираль

Логарифмическая спираль была введена Декартом в 1638 г., в письме Мерсенну. Якоб I Бернулли (1654–1705) завещал изобразить её на своём надгробии<sup>1</sup> с надписью

**EADEM MUTATA RESURGO,**<sup>2</sup>

поскольку эта кривая инвариантна относительно целого ряда геометрических преобразований

... в том числе и относительно тангенциального отображения!



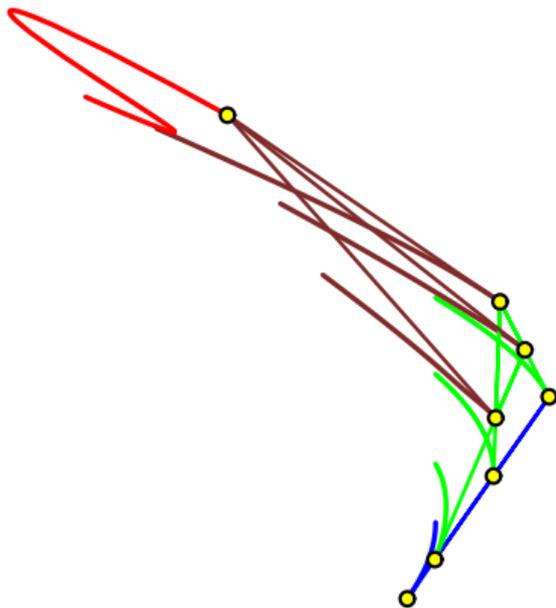
**Теорема 1.** Рассмотрим точки пересечения логарифмической спирали  $C$  со своей касательной. Касательные, проведённые через эти точки пересекаются на этой же спирали. Иначе говоря,  $F(C, C, C) = C$  для любой ветви отображения  $F$ .

<sup>1</sup>Рисунки взяты из Wikipedia

<sup>2</sup>I'll be back

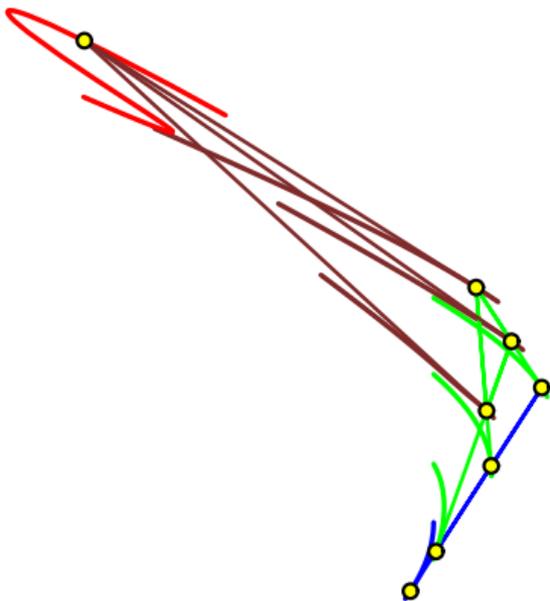
## 3D-совместность

Основным свойством тангенциального отображения является 3D-совместность. Это означает, что если начать с кривых  $C, C_1, C_2, C_3$  и построить кривые  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$ , то кривая  $C_{123}$ , построенная по тройке  $C_i, C_{ij}, C_{ik}$  будет одна и та же при любой перестановке  $i, j, k$ .



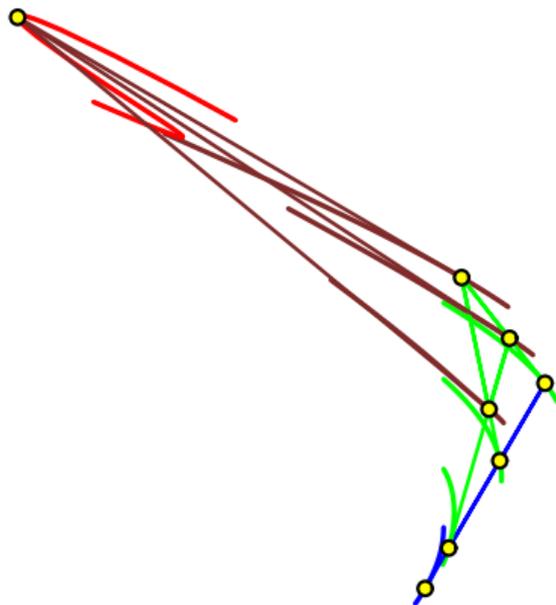
## 3D-совместность

Основным свойством тангенциального отображения является 3D-совместность. Это означает, что если начать с кривых  $C, C_1, C_2, C_3$  и построить кривые  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$ , то кривая  $C_{123}$ , построенная по тройке  $C_i, C_{ij}, C_{ik}$  будет одна и та же при любой перестановке  $i, j, k$ .



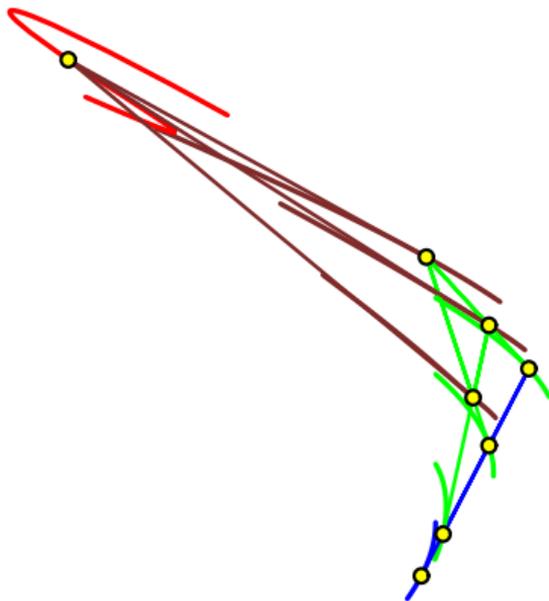
## 3D-совместность

Основным свойством тангенциального отображения является 3D-совместность. Это означает, что если начать с кривых  $C, C_1, C_2, C_3$  и построить кривые  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$ , то кривая  $C_{123}$ , построенная по тройке  $C_i, C_{ij}, C_{ik}$  будет одна и та же при любой перестановке  $i, j, k$ .



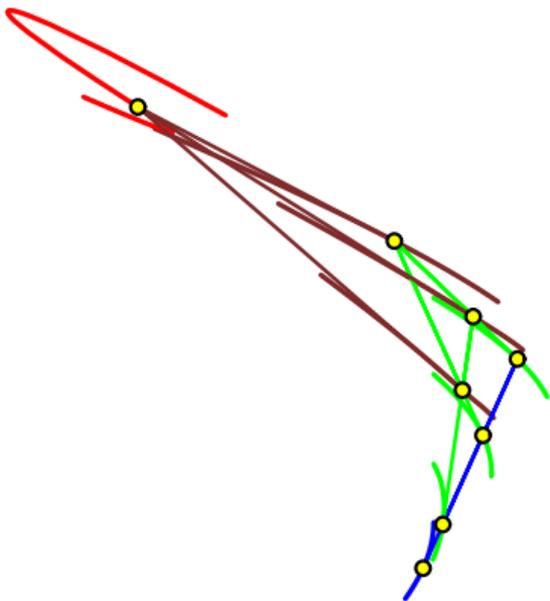
## 3D-совместность

Основным свойством тангенциального отображения является 3D-совместность. Это означает, что если начать с кривых  $C, C_1, C_2, C_3$  и построить кривые  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$ , то кривая  $C_{123}$ , построенная по тройке  $C_i, C_{ij}, C_{ik}$  будет одна и та же при любой перестановке  $i, j, k$ .



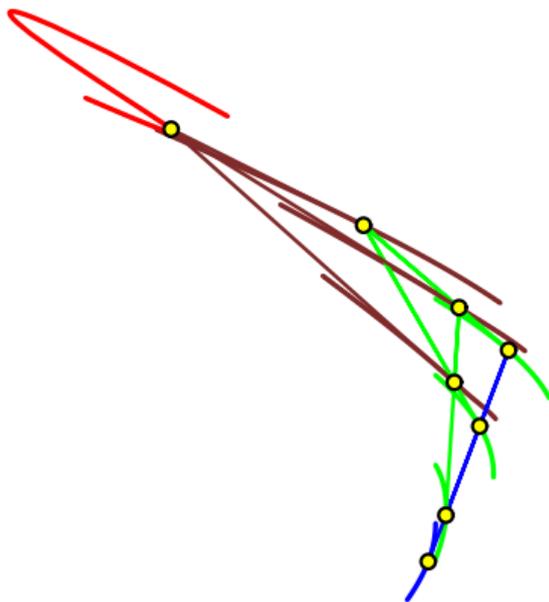
## 3D-совместность

Основным свойством тангенциального отображения является 3D-совместность. Это означает, что если начать с кривых  $C, C_1, C_2, C_3$  и построить кривые  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$ , то кривая  $C_{123}$ , построенная по тройке  $C_i, C_{ij}, C_{ik}$  будет одна и та же при любой перестановке  $i, j, k$ .



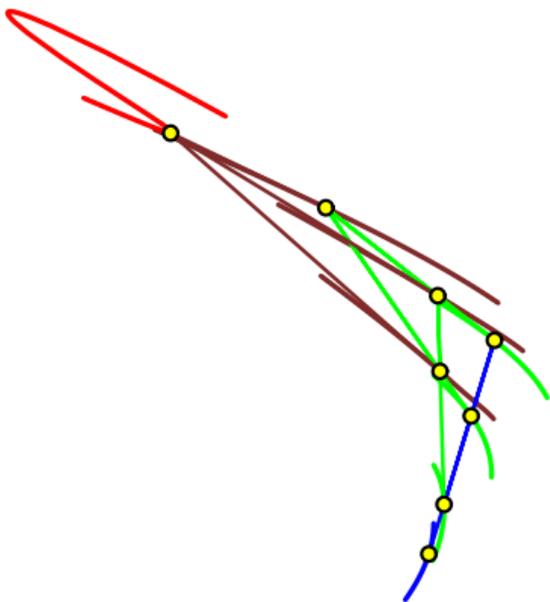
## 3D-совместность

Основным свойством тангенциального отображения является 3D-совместность. Это означает, что если начать с кривых  $C, C_1, C_2, C_3$  и построить кривые  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$ , то кривая  $C_{123}$ , построенная по тройке  $C_i, C_{ij}, C_{ik}$  будет одна и та же при любой перестановке  $i, j, k$ .



## 3D-совместность

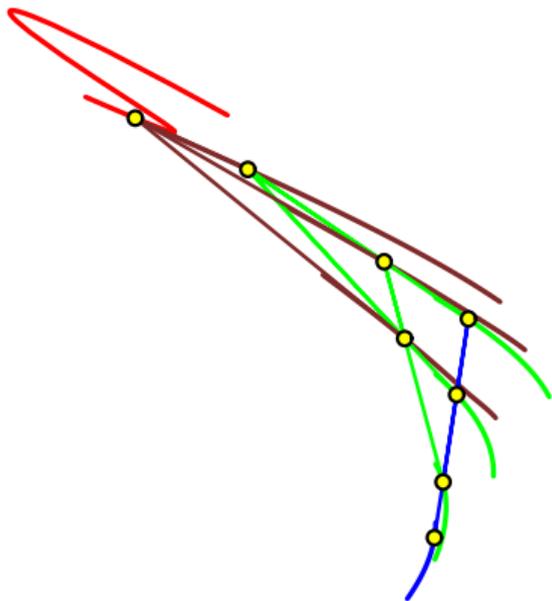
Основным свойством тангенциального отображения является 3D-совместность. Это означает, что если начать с кривых  $C, C_1, C_2, C_3$  и построить кривые  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$ , то кривая  $C_{123}$ , построенная по тройке  $C_i, C_{ij}, C_{ik}$  будет одна и та же при любой перестановке  $i, j, k$ .





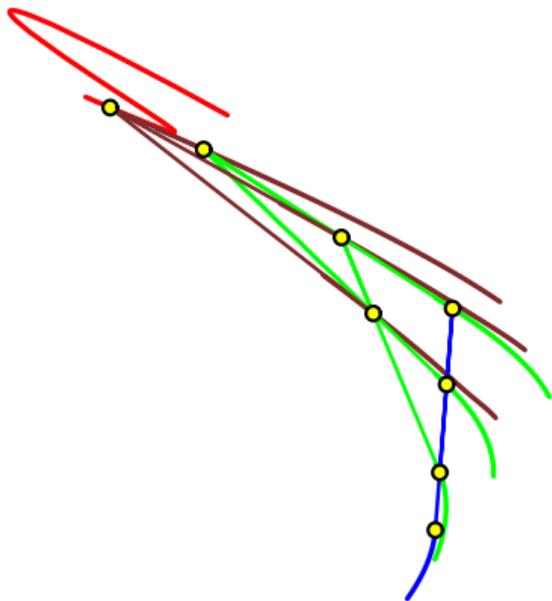
## 3D-совместность

Основным свойством тангенциального отображения является 3D-совместность. Это означает, что если начать с кривых  $C, C_1, C_2, C_3$  и построить кривые  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$ , то кривая  $C_{123}$ , построенная по тройке  $C_i, C_{ij}, C_{ik}$  будет одна и та же при любой перестановке  $i, j, k$ .



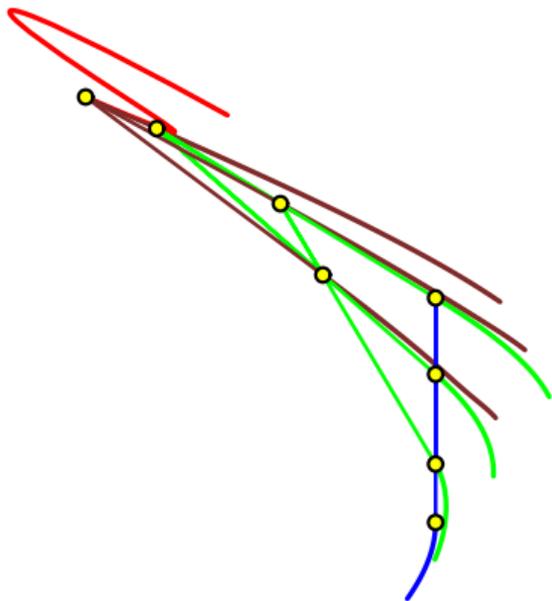
## 3D-совместность

Основным свойством тангенциального отображения является 3D-совместность. Это означает, что если начать с кривых  $C, C_1, C_2, C_3$  и построить кривые  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$ , то кривая  $C_{123}$ , построенная по тройке  $C_i, C_{ij}, C_{ik}$  будет одна и та же при любой перестановке  $i, j, k$ .



## 3D-совместность

Основным свойством тангенциального отображения является 3D-совместность. Это означает, что если начать с кривых  $C, C_1, C_2, C_3$  и построить кривые  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$ , то кривая  $C_{123}$ , построенная по тройке  $C_i, C_{ij}, C_{ik}$  будет одна и та же при любой перестановке  $i, j, k$ .

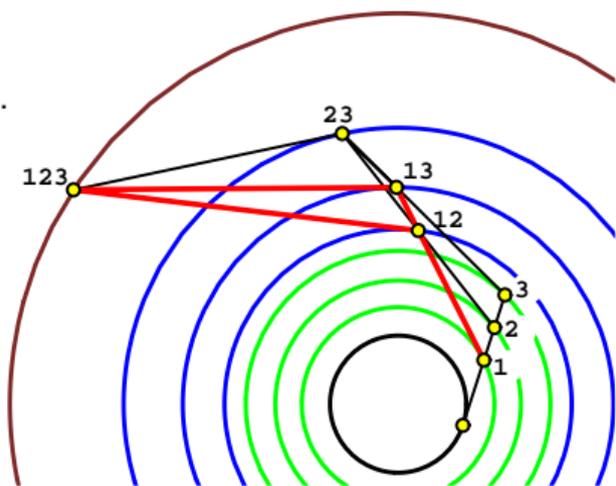


## 3D-совместность

Основным свойством тангенциального отображения является 3D-совместность.

Это означает, что если начать с кривых  $C, C_1, C_2, C_3$  и построить кривые  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$ , то кривая  $C_{123}$ , построенная по тройке  $C_i, C_{ij}, C_{ik}$  будет одна и та же при любой перестановке  $i, j, k$ .

Альтернативно, это можно сформулировать следующим образом.



**Теорема 2.** Тангенциальное отображение удовлетворяет (локальному) тождеству

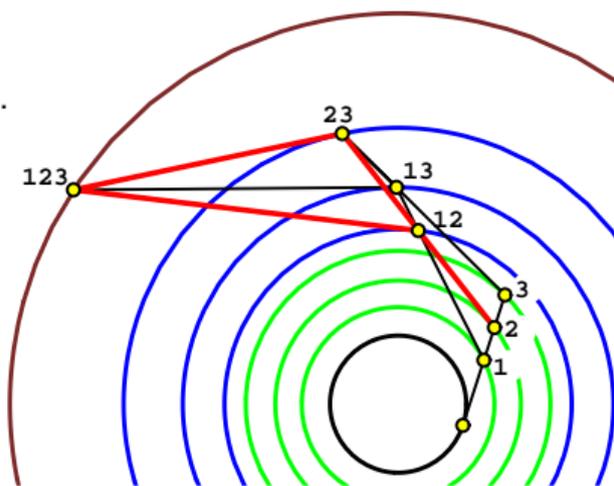
$$\begin{aligned} C_{123} &= F(C_1, F(C, C_1, C_2), F(C, C_1, C_3)) \\ &= F(C_2, F(C, C_1, C_2), F(C, C_2, C_3)) \\ &= F(C_3, F(C, C_1, C_3), F(C, C_2, C_3)). \end{aligned} \tag{1}$$

## 3D-совместность

Основным свойством тангенциального отображения является 3D-совместность.

Это означает, что если начать с кривых  $C, C_1, C_2, C_3$  и построить кривые  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$ , то кривая  $C_{123}$ , построенная по тройке  $C_i, C_{ij}, C_{ik}$  будет одна и та же при любой перестановке  $i, j, k$ .

Альтернативно, это можно сформулировать следующим образом.



**Теорема 2.** Тангенциальное отображение удовлетворяет (локальному) тождеству

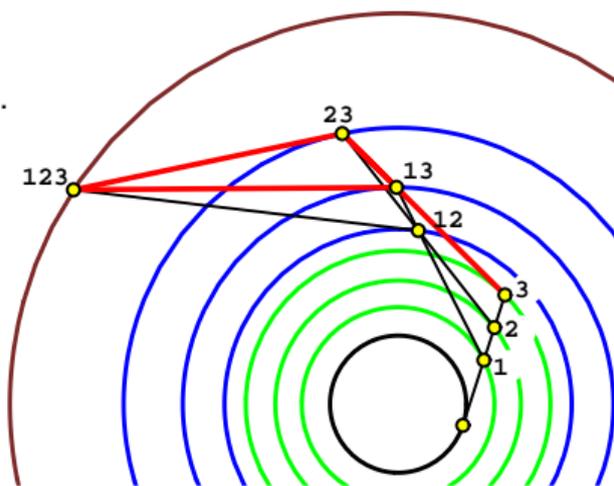
$$\begin{aligned} C_{123} &= F(C_1, F(C, C_1, C_2), F(C, C_1, C_3)) \\ &= F(C_2, F(C, C_1, C_2), F(C, C_2, C_3)) \\ &= F(C_3, F(C, C_1, C_3), F(C, C_2, C_3)). \end{aligned} \tag{1}$$

## 3D-совместность

Основным свойством тангенциального отображения является 3D-совместность.

Это означает, что если начать с кривых  $C, C_1, C_2, C_3$  и построить кривые  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$ , то кривая  $C_{123}$ , построенная по тройке  $C_i, C_{ij}, C_{ik}$  будет одна и та же при любой перестановке  $i, j, k$ .

Альтернативно, это можно сформулировать следующим образом.

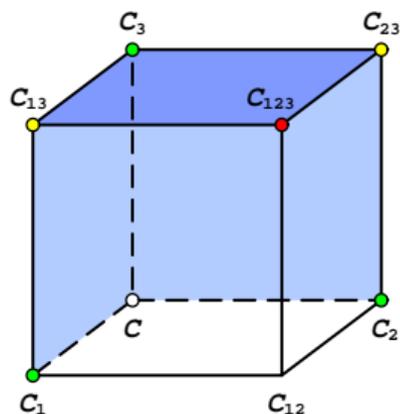


**Теорема 2.** Тангенциальное отображение удовлетворяет (локальному) тождеству

$$\begin{aligned} C_{123} &= F(C_1, F(C, C_1, C_2), F(C, C_1, C_3)) \\ &= F(C_2, F(C, C_1, C_2), F(C, C_2, C_3)) \\ &= F(C_3, F(C, C_1, C_3), F(C, C_2, C_3)). \end{aligned} \tag{1}$$

Комбинаторная структура 3D-совместности [1, 2] представляется приписыванием аргументов отображения вершинам, а самого отображения граням куба.  $N$ -кратной итерации отображения отвечает  $(N + 1)$ -мерный куб.

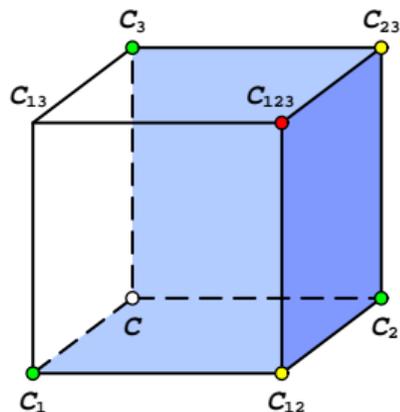
Это понятие применяется обычно к дискретным интегрируемым уравнениям типа разностного КдФ (поля в вершинах куба) или отображениям типа Янга-Бакстера [3] (поля на рёбрах). Уравнения обоих типов возникают, например, как принцип нелинейной суперпозиции для преобразований Дарбу-Бэклунда.



- 
- [1] F.W. Nijhoff, A.J. Walker. The discrete and continuous Painlevé hierarchy and the Garnier system. *Glasgow Math. J.* **43A** (2001) 109–123.
  - [2] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Integrable systems on quad-graphs. *Int. Math. Res. Notes* (2002) 573–611.
  - [3] A.P. Veselov. Yang-Baxter maps and integrable dynamics. *Phys. Lett. A* **314:3** (2003) 214–221.

Комбинаторная структура 3D-совместности [1, 2] представляется приписыванием аргументов отображения вершинам, а самого отображения граням куба.  $N$ -кратной итерации отображения отвечает  $(N + 1)$ -мерный куб.

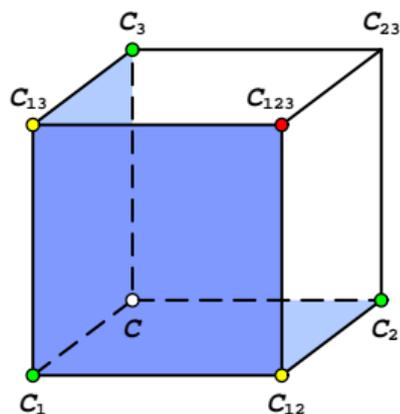
Это понятие применяется обычно к дискретным интегрируемым уравнениям типа разностного КдФ (поля в вершинах куба) или отображениям типа Янга-Бакстера [3] (поля на рёбрах). Уравнения обоих типов возникают, например, как принцип нелинейной суперпозиции для преобразований Дарбу-Бэклунда.



- 
- [1] F.W. Nijhoff, A.J. Walker. The discrete and continuous Painlevé hierarchy and the Garnier system. *Glasgow Math. J.* **43A** (2001) 109–123.
  - [2] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Integrable systems on quad-graphs. *Int. Math. Res. Notes* (2002) 573–611.
  - [3] A.P. Veselov. Yang-Baxter maps and integrable dynamics. *Phys. Lett. A* **314:3** (2003) 214–221.

Комбинаторная структура 3D-совместности [1, 2] представляется приписыванием аргументов отображения вершинам, а самого отображения граням куба.  $N$ -кратной итерации отображения отвечает  $(N + 1)$ -мерный куб.

Это понятие применяется обычно к дискретным интегрируемым уравнениям типа разностного КдФ (поля в вершинах куба) или отображениям типа Янга-Бакстера [3] (поля на рёбрах). Уравнения обоих типов возникают, например, как принцип нелинейной суперпозиции для преобразований Дарбу-Бэклунда.



- 
- [1] F.W. Nijhoff, A.J. Walker. The discrete and continuous Painlevé hierarchy and the Garnier system. *Glasgow Math. J.* **43A** (2001) 109–123.
  - [2] A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Integrable systems on quad-graphs. *Int. Math. Res. Notes* (2002) 573–611.
  - [3] A.P. Veselov. Yang-Baxter maps and integrable dynamics. *Phys. Lett. A* **314:3** (2003) 214–221.

## Простейшие примеры

- Поля в вершинах:

Дискретное волновое уравнение

$$u + u_i + u_j + u_{ij} = 0$$

Независимо от порядка вычислений:

$$u_{123} = 2u + u_1 + u_2 + u_3.$$

## Простейшие примеры

- Поля в вершинах:

Теорема перестановочности Бьянки для уравнения  $\sinh$ -Гордона [4]

$$\mu^i (u u_i + u_j u_{ij}) = \mu^j (u u_j + u_i u_{ij}) \quad (2)$$

Независимо от порядка вычислений:

$$u_{123} = - \frac{((\mu^2)^2 - (\mu^1)^2) \mu^3 u_1 u_2 + c.p.}{((\mu^2)^2 - (\mu^1)^2) \mu^3 u_3 + c.p.}$$

---

[4] R. Hirota. Nonlinear partial difference equations. III. Discrete sine-Gordon equation. *J. Phys. Soc. Japan* **43** (1977) [2079–2086](#).

## Простейшие примеры

- Поля в вершинах:

Теорема перестановочности Бьянки для уравнения КдФ

$$(u - u_{ij})(u_i - u_j) = \mu^j - \mu^i$$

Независимо от порядка вычислений:

$$u_{123} = -\frac{(\mu^2 - \mu^1)u_1u_2 + c.p.}{(\mu^2 - \mu^1)u_3 + c.p.}$$

- Поля на рёбрах:

эквивалентная форма дискретного КдФ ( $a^j = u_j - u$ ):

$$a_i^j = a^i + \frac{\mu^i - \mu^j}{a^i - a^j}$$

## В нашем случае имеются важные отличия:

- Уравнения типа  $\Delta$ КДФ или ЯБ являются **двумерными**: две независимые дискретные переменные отвечают сдвигам вдоль рёбер элементарного квадрата. Тангенциальное отображение связано с **трёхмерным** уравнением: вдобавок к дискретным переменным появляется одна непрерывная, отвечающая параметру на кривых.

- Тангенциальное отображение асимметрично: роли участвующих кривых различны. В частности, если построение  $C_{ij}$  по  $C$ ,  $C_i$ ,  $C_j$  описывается как **дифференциальное** отображение, то построение, например,  $C_j$  по  $C$ ,  $C_i$ ,  $C_{ij}$  требует **интегрирования**.

В терминологии [5], **не** выполнено условие **невырожденности**. Поэтому набор  $C$ ,  $C_i$ ,  $C_j$ ,  $C_k, \dots$  удобнее в качестве начальных данных, по сравнению последовательностью  $C$ ,  $C_i$ ,  $C_{ij}$ ,  $C_{ijk}, \dots$ , как принято в стандартной формулировке отображений ЯБ.

---

[5] P. Etingof, T. Schedler, A. Soloviev. Set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation. *Duke* **100:2** (1999) 169–209.

## Факторизация дифференциальных операторов

Пусть кривая  $C$  задана параметрически  $r = r(t)$ . Пересечение с кривой  $C_i$  задаётся уравнением вида

$$r_i(t) = r(t) + a^i(t)\dot{r}(t), \quad \dot{r} := D(r) := \frac{dr}{dt},$$

играющим роль вспомогательной линейной задачи для одной из ветвей тангенциального отображения. Кривая  $C_{ij}$  определяется из условия совместности

$$(1 + a_i^j D)(1 + a^i D) = (1 + a_j^i D)(1 + a^j D), \quad (3)$$

где коэффициент  $a_j^i$  отвечает ребру  $C_j C_{ij}$ . Разрешая это уравнение, получаем дифференциальное отображение

$$(a^i, a^j) \mapsto (a_j^i, a_i^j), \quad a_j^i = \frac{(a^i - a^j)a^i}{a^i - a^j + a^i \dot{a}^j - \dot{a}^i a^j}. \quad (4)$$

Альтернативно, формула  $a^i = v/v_i$  определяет потенциал  $v$ , удовлетворяющий отображению

$$f : (v, v_i, v_j) \mapsto v_{ij}, \quad v_{ij} = \frac{v_i v_j}{v} + \frac{\dot{v}_i v_j - v_i \dot{v}_j}{v_j - v_i}. \quad (5)$$

Отображения (4), (5) интерпретируются как 3-мерные уравнения на  $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}$ , с полями  $a$  отвечающими рёбрам решётки и  $v$  отвечающими вершинам. Эти уравнения простыми подстановками связаны с полудискретной цепочкой Тоды, введённой впервые в [6] (насколько мне известно), см. также [7].

- Немного более простые отображения возникают при нормировке с единичным ведущим коэффициентом:

$$(D - a_i^j)(D - a_i) = (D - a_j^i)(D - a_j).$$

---

[6] D. Levi, L. Pilloni, P.M. Santini. Integrable three-dimensional lattices. *J. Phys. A* **14:7** (1981) [1567–1575](#).

[7] V.E. Adler, S.Ya. Startsev. Discrete analogues of the Liouville equation. *Theor. Math. Phys.* **121:2** (1999) [271–284](#).

Свойство 3D-совместности эквивалентно коммутативности операторов  $T_i : a^j \rightarrow a_i^j$ :

$$T_i T_j(a^k) = T_j T_i(a^k), \quad (6)$$

или тождеству типа (1):

$$\begin{aligned} v_{123} &= f(v_1, f(v, v_1, v_2), f(v, v_1, v_3)) \\ &= f(v_2, f(v, v_1, v_2), f(v, v_2, v_3)) \\ &= f(v_3, f(v, v_1, v_3), f(v, v_2, v_3)). \end{aligned} \quad (7)$$

Оба тождества можно проверить непосредственно, хотя вычисление достаточно утомительное. Его можно избежать при помощи следующего рассуждения.

**Доказательство Теоремы 2.** Согласно (3), тангенциальное отображение сводится к восстановлению обыкновенного дифференциального оператора второго порядка по его ядру, при условии единичности свободного члена. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$A = (1 + T_i(a_j^k)D)(1 + a_i^j D)(1 + a^i D)$$

отвечающий одному из трёх возможных способов вычисления  $r_{ijk}$ .

Из уравнения (3) следует, что  $A$  делится справа не только на  $1 + a^i D$ , но и на  $1 + a^j D$ . Кроме того, два левых множителя  $A$  можно переписать как  $(1 + T_i(a_k^j)D)(1 + a_i^k D)$ , то есть оператор  $A$  не меняется при перестановке  $j$  и  $k$ . Но это значит, что он делится справа также на  $1 + a^k D$ .

Из инвариантности ядра относительно любых перестановок индексов следует инвариантность самого оператора  $A$ . ■

$N$ -кратному тангенциальному отображению отвечает дифференциальный оператор порядка  $N$ , делящийся справа на операторы  $1+a^i D$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Отсюда немедленно получается вронскианная формула (для обеих компонент  $r$ )

$$r_{1,2,\dots,N} = \frac{\det \begin{pmatrix} r & \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_N \\ \dot{r} & \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 & \dots & \dot{\varphi}_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ D^N(r) & D^N(\varphi_1) & D^N(\varphi_2) & \dots & D^N(\varphi_N) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 & \dots & \dot{\varphi}_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D^N(\varphi_1) & D^N(\varphi_2) & \dots & D^N(\varphi_N) \end{pmatrix}}$$

где  $a^i = -\varphi_i/\dot{\varphi}_i$ .

## Пример. Логарифмические спирали и концентрические окружности

Пусть  $r = e^{(\gamma+i)t}$  ( $\gamma = 0$  отвечает окружности). Тогда кривые

$$r_k = r + a^k \dot{r} = (1 + \gamma a^k + i a^k) e^{(\gamma+i)t}$$

гомотетичны исходной если и только если коэффициенты  $a^k$  постоянны. Действие отображения (4) на постоянные коэффициенты тождественно:  $a_j^k = a^k$ , следовательно тангенциальное отображение сводится к поворотному растяжению

$$r_{jk} = (1 + \gamma a^j + i a^j)(1 + \gamma a^k + i a^k)r$$

сохраняющему рассматриваемое семейство кривых.  $N$ -кратное отображение задаётся аналогичной явной формулой, то есть этот пример следует считать тривиальным.

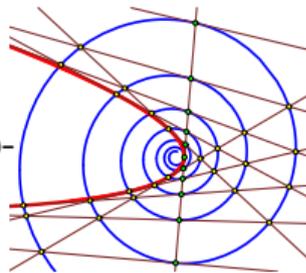
- Даже этот простейший пример показывает, что соответствие между тангенциальным отображением и дифференциальными операторами не взаимно однозначное. Оно зависит от выбора начальной кривой и её параметризации. Отображения, отвечающие одним и тем же операторам локально эквивалентны, но глобальная картина может быть совершенно разной. Например, число ветвей равно 4 в случае концентрических окружностей и  $\infty$  в случае логарифмических спиралей.

- Авто-отображение логарифмической спирали получается при дополнительной связи  $r_k(t) = r(t + \delta_k)$ . Отсюда следует, что  $\delta_k$  определяются как корни уравнения

$$\cos \delta - \gamma \sin \delta = \exp(-\gamma \delta),$$

а коэффициенты  $a^k$  выражаются через них по формуле

$$a^k = \exp(\gamma \delta_k) \sin \delta_k.$$

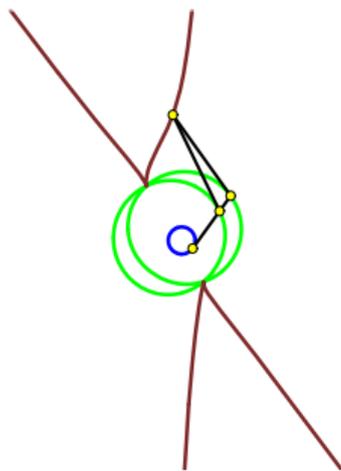
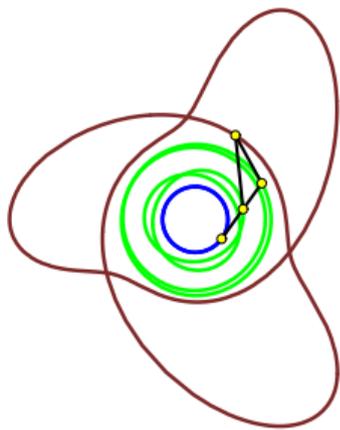


Отсюда можно показать, что граница области, свободной от прямых аппроксимируется параболой.

## Пример. Периодические коэффициенты

Хорошую глобальную картинку можно получить, взяв в качестве начальной кривой снова окружность  $r = e^{it}$ , при периодических коэффициентах  $a^k(t)$  с периодом, соизмеримым с  $\pi$ . Например, следующие графики получены для коэффициентов вида

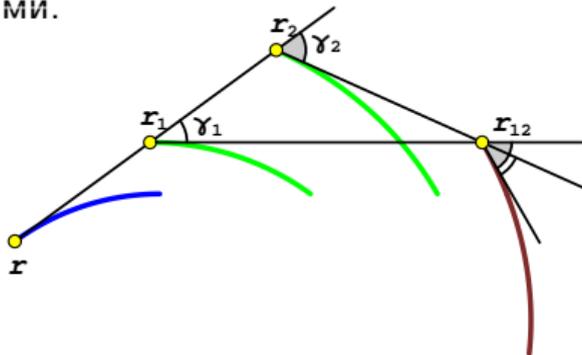
$$a^k = \alpha + \beta \sin\left(\frac{m}{n}t + \gamma\right).$$



## Редукция. Локсодромы

Слегка нарушая терминологию, будем говорить, что кривая  $\tilde{C}$  является **локсодромой** для заданной кривой  $C$ , если она пересекает касательные к  $C$  под постоянным углом  $\gamma$  (изогональные траектории; в частности, если  $\gamma = \pi/2$ , то  $\tilde{C}$  есть **эвольвента**  $C$ ).

Замечательным образом, тангенциальное отображение сохраняет эту связь между кривыми.

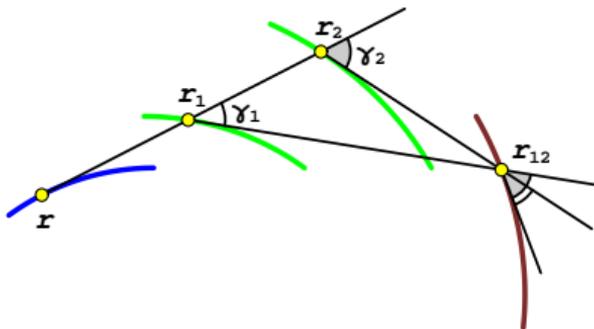


**Теорема 3.** Пусть кривые  $C_i$  и  $C_j$  пересекают касательные к кривой  $C$  под постоянными углами  $\gamma^i$  и  $\gamma^j$  соответственно, при  $\gamma^i \neq \gamma^j$ . Тогда кривая  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$  пересекает касательные к  $C_i$  под углом  $\gamma^j$ , а касательные к  $C_j$  под углом  $\gamma^i$ .

## Редукция. Локсодромы

Слегка нарушая терминологию, будем говорить, что кривая  $\tilde{C}$  является **локсодромой** для заданной кривой  $C$ , если она пересекает касательные к  $C$  под постоянным углом  $\gamma$  (изогональные траектории; в частности, если  $\gamma = \pi/2$ , то  $\tilde{C}$  есть **эвольвента**  $C$ ).

Замечательным образом, тангенциальное отображение сохраняет эту связь между кривыми.

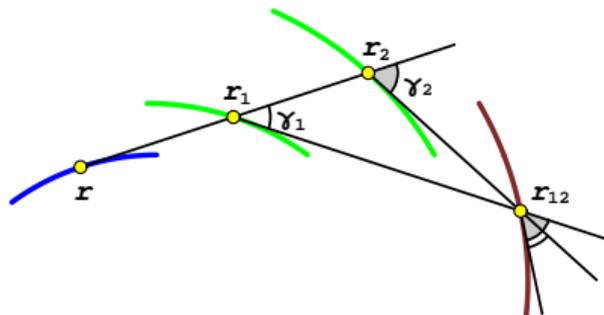


**Теорема 3.** Пусть кривые  $C_i$  и  $C_j$  пересекают касательные к кривой  $C$  под постоянными углами  $\gamma^i$  и  $\gamma^j$  соответственно, при  $\gamma^i \neq \gamma^j$ . Тогда кривая  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$  пересекает касательные к  $C_i$  под углом  $\gamma^j$ , а касательные к  $C_j$  под углом  $\gamma^i$ .

## Редукция. Локсодромы

Слегка нарушая терминологию, будем говорить, что кривая  $\tilde{C}$  является **локсодромой** для заданной кривой  $C$ , если она пересекает касательные к  $C$  под постоянным углом  $\gamma$  (изогональные траектории; в частности, если  $\gamma = \pi/2$ , то  $\tilde{C}$  есть **эвольвента**  $C$ ).

Замечательным образом, тангенциальное отображение сохраняет эту связь между кривыми.

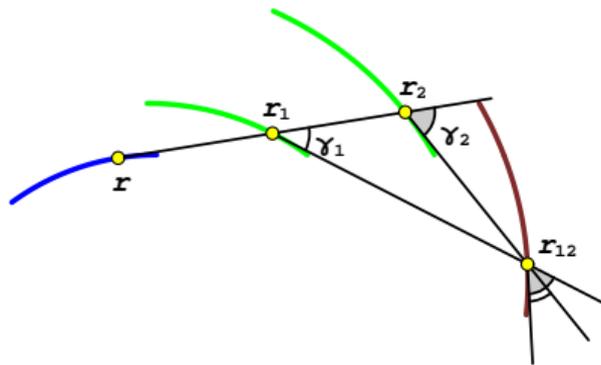


**Теорема 3.** Пусть кривые  $C_i$  и  $C_j$  пересекают касательные к кривой  $C$  под постоянными углами  $\gamma^i$  и  $\gamma^j$  соответственно, при  $\gamma^i \neq \gamma^j$ . Тогда кривая  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$  пересекает касательные к  $C_i$  под углом  $\gamma^j$ , а касательные к  $C_j$  под углом  $\gamma^i$ .

## Редукция. Локсодромы

Слегка нарушая терминологию, будем говорить, что кривая  $\tilde{C}$  является **локсодромой** для заданной кривой  $C$ , если она пересекает касательные к  $C$  под постоянным углом  $\gamma$  (изогональные траектории; в частности, если  $\gamma = \pi/2$ , то  $\tilde{C}$  есть **эвольвента**  $C$ ).

Замечательным образом, тангенциальное отображение сохраняет эту связь между кривыми.

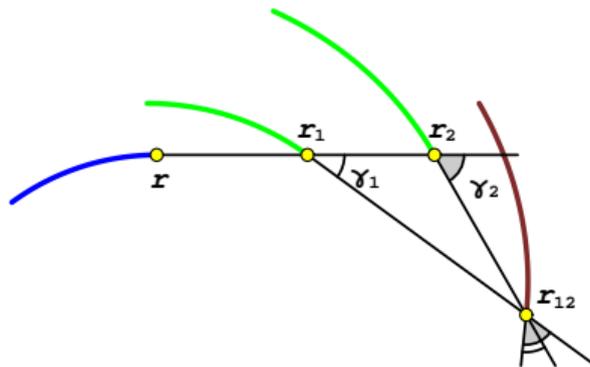


**Теорема 3.** Пусть кривые  $C_i$  и  $C_j$  пересекают касательные к кривой  $C$  под постоянными углами  $\gamma^i$  и  $\gamma^j$  соответственно, при  $\gamma^i \neq \gamma^j$ . Тогда кривая  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$  пересекает касательные к  $C_i$  под углом  $\gamma^j$ , а касательные к  $C_j$  под углом  $\gamma^i$ .

## Редукция. Локсодромы

Слегка нарушая терминологию, будем говорить, что кривая  $\tilde{C}$  является **локсодромой** для заданной кривой  $C$ , если она пересекает касательные к  $C$  под постоянным углом  $\gamma$  (изогональные траектории; в частности, если  $\gamma = \pi/2$ , то  $\tilde{C}$  есть **эвольвента**  $C$ ).

Замечательным образом, тангенциальное отображение сохраняет эту связь между кривыми.



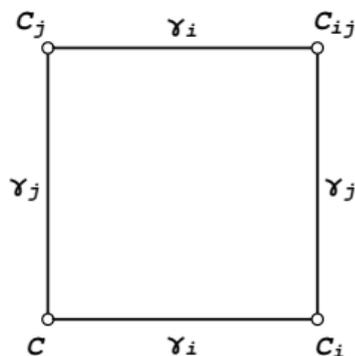
**Теорема 3.** Пусть кривые  $C_i$  и  $C_j$  пересекают касательные к кривой  $C$  под постоянными углами  $\gamma^i$  и  $\gamma^j$  соответственно, при  $\gamma^i \neq \gamma^j$ . Тогда кривая  $C_{ij} = F(C, C_i, C_j)$  пересекает касательные к  $C_i$  под углом  $\gamma^j$ , а касательные к  $C_j$  под углом  $\gamma^i$ .

- Формально, это утверждение выглядит как теорема Бьянки о перестановочности преобразований типа Дарбу-Бэклунда. Однако, ситуация в данном примере оказывается более простой: построение локсодром сводится к простой квадратуре, тогда как преобразование Бэклунда требует решения уравнения Риккати.

Принцип суперпозиции для локсодром можно, при надлежащем выборе параметра на кривых, привести к линейному виду:

$$\sin(\gamma^i - \gamma^j)y_{ij} = \sin(\gamma^i)y_i - \sin(\gamma^j)y_j.$$

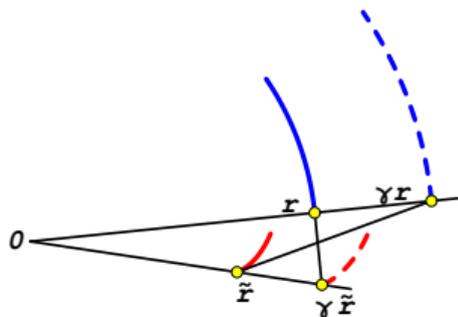
Настоящее преобразование Дарбу, приводящее к нелинейному принципу суперпозиции возникает при редукции из следующего примера.



## Редукция. Преобразование Дарбу

Пусть  $H_\gamma$  обозначает гомотетию с коэффициентом  $\gamma \neq 1$  относительно фиксированной точки  $O$ . Кривые  $C, \tilde{C}$  находятся в **тангенциальном соответствии** с параметром  $\gamma$ , если касательная к  $C$  в произвольной точке  $r$  пересекает  $H_\gamma(\tilde{C})$  в точке  $H_\gamma(\tilde{r})$ , такой что касательная к  $\tilde{C}$  в точке  $\tilde{r}$  пересекает  $H_\gamma(C)$  в точке  $H_\gamma(r)$ .

Эта связь также сохраняется при тангенциальном отображении.



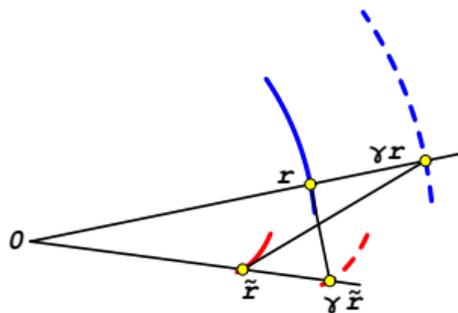
**Теорема 4.** Пусть кривая  $C$  находится в тангенциальном соответствии с кривыми  $C_i, C_j$ , с параметрами  $\gamma^i, \gamma^j$  соответственно, и  $\gamma^i \neq \gamma^j$ . Тогда существует единственная кривая  $C_{ij}$  находящаяся в тангенциальном соответствии с кривыми  $C_i, C_j$ , с параметрами  $\gamma^j, \gamma^i$  соответственно. При этом

$$H_{\gamma^i \gamma^j}(C_{ij}) = F(C, H_{\gamma^i}(C_i), H_{\gamma^j}(C_j)).$$

## Редукция. Преобразование Дарбу

Пусть  $H_\gamma$  обозначает гомотетию с коэффициентом  $\gamma \neq 1$  относительно фиксированной точки  $O$ . Кривые  $C, \tilde{C}$  находятся в **тангенциальном соответствии** с параметром  $\gamma$ , если касательная к  $C$  в произвольной точке  $r$  пересекает  $H_\gamma(\tilde{C})$  в точке  $H_\gamma(\tilde{r})$ , такой что касательная к  $\tilde{C}$  в точке  $\tilde{r}$  пересекает  $H_\gamma(C)$  в точке  $H_\gamma(r)$ .

Эта связь также сохраняется при тангенциальном отображении.



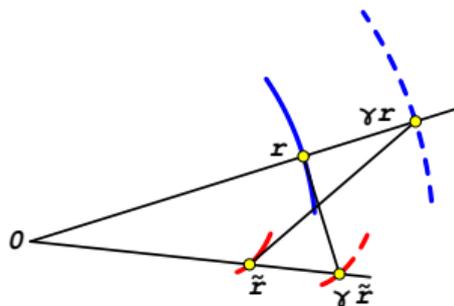
**Теорема 4.** Пусть кривая  $C$  находится в тангенциальном соответствии с кривыми  $C_i, C_j$ , с параметрами  $\gamma^i, \gamma^j$  соответственно, и  $\gamma^i \neq \gamma^j$ . Тогда существует единственная кривая  $C_{ij}$  находящаяся в тангенциальном соответствии с кривыми  $C_i, C_j$ , с параметрами  $\gamma^j, \gamma^i$  соответственно. При этом

$$H_{\gamma^i \gamma^j}(C_{ij}) = F(C, H_{\gamma^i}(C_i), H_{\gamma^j}(C_j)).$$

## Редукция. Преобразование Дарбу

Пусть  $H_\gamma$  обозначает гомотетию с коэффициентом  $\gamma \neq 1$  относительно фиксированной точки  $O$ . Кривые  $C, \tilde{C}$  находятся в **тангенциальном соответствии** с параметром  $\gamma$ , если касательная к  $C$  в произвольной точке  $r$  пересекает  $H_\gamma(\tilde{C})$  в точке  $H_\gamma(\tilde{r})$ , такой что касательная к  $\tilde{C}$  в точке  $\tilde{r}$  пересекает  $H_\gamma(C)$  в точке  $H_\gamma(r)$ .

Эта связь также сохраняется при тангенциальном отображении.



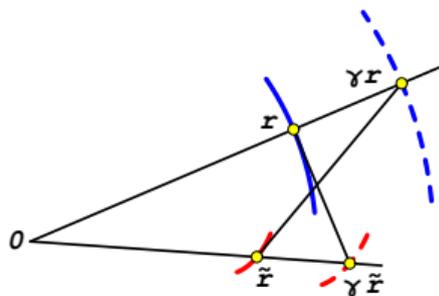
**Теорема 4.** Пусть кривая  $C$  находится в тангенциальном соответствии с кривыми  $C_i, C_j$ , с параметрами  $\gamma^i, \gamma^j$  соответственно, и  $\gamma^i \neq \gamma^j$ . Тогда существует единственная кривая  $C_{ij}$  находящаяся в тангенциальном соответствии с кривыми  $C_i, C_j$ , с параметрами  $\gamma^j, \gamma^i$  соответственно. При этом

$$H_{\gamma^i \gamma^j}(C_{ij}) = F(C, H_{\gamma^i}(C_i), H_{\gamma^j}(C_j)).$$

## Редукция. Преобразование Дарбу

Пусть  $H_\gamma$  обозначает гомотетию с коэффициентом  $\gamma \neq 1$  относительно фиксированной точки  $O$ . Кривые  $C, \tilde{C}$  находятся в **тангенциальном соответствии** с параметром  $\gamma$ , если касательная к  $C$  в произвольной точке  $r$  пересекает  $H_\gamma(\tilde{C})$  в точке  $H_\gamma(\tilde{r})$ , такой что касательная к  $\tilde{C}$  в точке  $\tilde{r}$  пересекает  $H_\gamma(C)$  в точке  $H_\gamma(r)$ .

Эта связь также сохраняется при тангенциальном отображении.

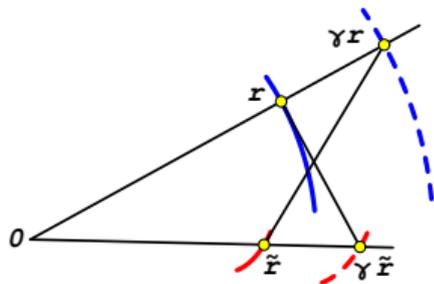


**Теорема 4.** Пусть кривая  $C$  находится в тангенциальном соответствии с кривыми  $C_i, C_j$ , с параметрами  $\gamma^i, \gamma^j$  соответственно, и  $\gamma^i \neq \gamma^j$ . Тогда существует единственная кривая  $C_{ij}$  находящаяся в тангенциальном соответствии с кривыми  $C_i, C_j$ , с параметрами  $\gamma^j, \gamma^i$  соответственно. При этом

$$H_{\gamma^i \gamma^j}(C_{ij}) = F(C, H_{\gamma^i}(C_i), H_{\gamma^j}(C_j)).$$

## Редукция. Преобразование Дарбу

Пусть  $H_\gamma$  обозначает гомотетию с коэффициентом  $\gamma \neq 1$  относительно фиксированной точки  $O$ . Кривые  $C, \tilde{C}$  находятся в **тангенциальном соответствии** с параметром  $\gamma$ , если касательная к  $C$  в произвольной точке  $r$  пересекает  $H_\gamma(\tilde{C})$  в точке  $H_\gamma(\tilde{r})$ , такой что касательная к  $\tilde{C}$  в точке  $\tilde{r}$  пересекает  $H_\gamma(C)$  в точке  $H_\gamma(r)$ .



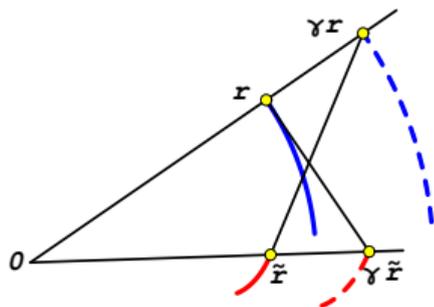
Эта связь также сохраняется при тангенциальном отображении.

**Теорема 4.** Пусть кривая  $C$  находится в тангенциальном соответствии с кривыми  $C_i, C_j$ , с параметрами  $\gamma^i, \gamma^j$  соответственно, и  $\gamma^i \neq \gamma^j$ . Тогда существует единственная кривая  $C_{ij}$  находящаяся в тангенциальном соответствии с кривыми  $C_i, C_j$ , с параметрами  $\gamma^j, \gamma^i$  соответственно. При этом

$$H_{\gamma^i \gamma^j}(C_{ij}) = F(C, H_{\gamma^i}(C_i), H_{\gamma^j}(C_j)).$$

## Редукция. Преобразование Дарбу

Пусть  $H_\gamma$  обозначает гомотетию с коэффициентом  $\gamma \neq 1$  относительно фиксированной точки  $O$ . Кривые  $C, \tilde{C}$  находятся в **тангенциальном соответствии** с параметром  $\gamma$ , если касательная к  $C$  в произвольной точке  $r$  пересекает  $H_\gamma(\tilde{C})$  в точке  $H_\gamma(\tilde{r})$ , такой что касательная к  $\tilde{C}$  в точке  $\tilde{r}$  пересекает  $H_\gamma(C)$  в точке  $H_\gamma(r)$ .



Эта связь также сохраняется при тангенциальном отображении.

**Теорема 4.** Пусть кривая  $C$  находится в тангенциальном соответствии с кривыми  $C_i, C_j$ , с параметрами  $\gamma^i, \gamma^j$  соответственно, и  $\gamma^i \neq \gamma^j$ . Тогда существует единственная кривая  $C_{ij}$  находящаяся в тангенциальном соответствии с кривыми  $C_i, C_j$ , с параметрами  $\gamma^j, \gamma^i$  соответственно. При этом

$$H_{\gamma^i \gamma^j}(C_{ij}) = F(C, H_{\gamma^i}(C_i), H_{\gamma^j}(C_j)).$$

- Можно показать, что при подходящей параметризации, тангенциальное соответствие эквивалентно преобразованию Дарбу для уравнения

$$\ddot{r} + u\dot{r} + \lambda r = 0,$$

которое есть не что иное, как спектральная задача для уравнения sinh-Гордона. Отображения (4), (5) принимают алгебраический вид

$$a_j^i = \frac{a^i - a^j}{a^j(\mu^i a^i - \mu^j a^j)}, \quad v_{ij}(v_j - v_i) = v(\mu_i v_j - \mu_j v_i)$$

и эквивалентны, соответственно, отображению  $(F_4)$  из [8] и уравнению Хироты (2). Эти уравнения выражают нелинейный принцип суперпозиции для преобразования Дарбу.

---

[8] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. Geometry of Yang-Baxter maps: pencils of conics and quadrirational mappings. *Comm. Anal. and Geom.* **12:5** (2004) [967–1007](#).

## Дискретное тангенциальное отображение

Аналог тангенциального отображения для дискретных кривых  $r = r(n)$  определяется уравнением

$$r_i = r + a^i(T - 1)(r), \quad T : n \mapsto n + 1.$$

Это приводит к факторизации разностных операторов:

$$(1 + a_j^i(T - 1))(1 + a^j(T - 1)) = (1 + a_j^j(T - 1))(1 + a^i(T - 1))$$

и к отображениям  $(a^i = T(v)/v_i)$

$$(a^i, a^j) \mapsto (a_j^i, a_i^j), \quad a_j^i = \frac{(a^i - a^j)T(a^i)}{(1 - a^j)T(a^i) - (1 - a^i)T(a^j)}, \quad (8)$$

$$f : (v, v_i, v_j) \mapsto v_{ij}, \quad v_{ij} = \frac{v_i v_j T(v_j - v_i)}{T(v)(v_j - v_i)} + \frac{T(v_i)v_j - v_i T(v_j)}{v_j - v_i}. \quad (9)$$

- Симметричная форма записи (9)

$$\frac{T(v_j - v_i)}{T(v)} + \frac{T(v_i) - v_{ij}}{v_i} + \frac{v_{ij} - T(v_j)}{v_j} = 0,$$

показывает, что сдвиг  $T$  фактически равноправен с  $T_i$  и  $T_j$ .

- Разностные подстановки связывают это уравнение с дискретными цепочкой Тоды и уравнением Кадомцева-Петвиашвили (в частности, переменная  $v$  играет роль волновой функции в линейной задаче для уравнения КП [9]). Альтернативные геометрические интерпретации этих уравнений можно найти в [10, 9]. В работе [11] будет развита общая теория этого класса уравнений.

---

[9] B.G. Konopelchenko, W.K. Schief. Menelaus' theorem, Clifford configurations and inversive geometry of the Schwarzian KP hierarchy. *J. Phys. A* **35:29** (2002) [6125–6144](#).

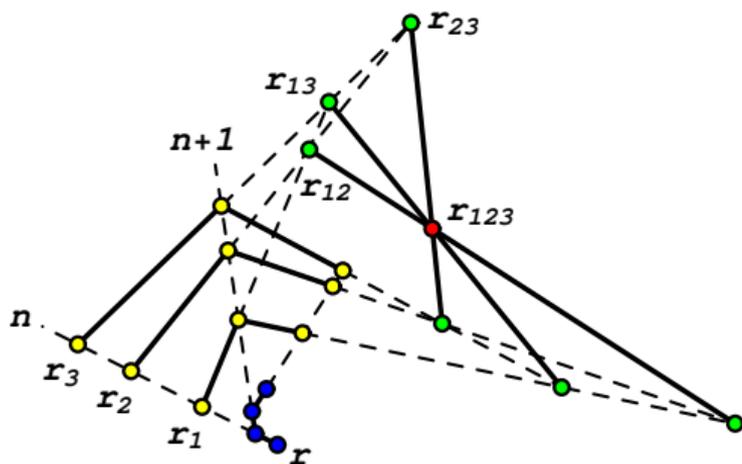
[10] A. Doliwa. Geometric discretization of the Toda system. *Phys. Lett. A* **234** (1997) [187–192](#).

[11] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris. The classification of integrable discrete equations of octahedron type, to appear, 2009.

- Свойство 3D-совместности отображений (8) и (9) формулируется теми же общими тождествами (6), (7), что и в непрерывном случае, и доказательство Теоремы 2 проходит без изменений.
- Имеется также простое геометрическое объяснение этого свойства<sup>3</sup>: треугольника  $r_{12}(n)r_{13}(n)r_{23}(n)$  и  $r_{12}(n+1)r_{13}(n+1)r_{23}(n+1)$  перспективны относительно оси  $r(n+1)r(n+2)$  (на рисунке помеченной  $n+1$ ), следовательно, согласно теореме Дезарга, прямые
 
$$r_{12}(n)r_{12}(n+1),$$

$$r_{13}(n)r_{13}(n+1),$$

$$r_{23}(n)r_{23}(n+1)$$
 проходят через одну точку, что и требуется.



<sup>3</sup>Это доказательство принадлежит W.K. Schief'y

## Заключение

Тангенциальное отображение не является совершенно новым объектом. Скорее, оно представляет некоторый интерес, как ещё одна геометрическая интерпретация хорошо известных интегрируемых уравнений, 3D и 2D:

- полудискретной цепочки Тоды ( $\Delta\Delta D$ );
- уравнения Хироты ( $\Delta\Delta$ , после редукции);
- модификация дискретного уравнения КП ( $\Delta\Delta\Delta$ , в дискретной версии отображения).